Ologaritmos neperianos: Algumas considerações históricas

Prof. Dr. Antonio Sérgio COBIANCHI (cobi@debas.eel.usp.br)

Resumo
O objetivo desse artigo é fazer uma exposição didática da construção de logaritmos feita por John Napier. Inicialmente faz um panorama do mundo matemático da época que antecedeu a invenção de Napier. Propõe mostrar a grande dificuldade encontrada para a resolução de cálculos naquela época, e o início do uso de fórmulas e métodos da trigonometria que facilitavam esses cálculos. Essas fórmulas foram essenciais para a construção dos logaritmos. Destaca a relação realizada entre progressões aritméticas e geométricas e o conceito geométrico-mecânico de pontos em movimento, passos iniciais do conceito de logaritmos.
Palavras-chave: Logaritmo, Trigonometria, Progressão Aritmética, Progressão Geométrica, Prostaférese.

Abstract
The aim of this paper is to make a didactic exposure building logarithms by John Napier. Initially makes an overview of the mathematical world at that time that preceded the invention of Napier. It proposes to show the great difficulty to the resolution calculations at that time and the beginning of the use of formulas and methods of trigonometry that facilitated these calculations. These formulas were essential for the construction of logarithms. Highlights relation performed between arithmetic and geometric progressions and the concept geometric-mechanic points moviment, initial steps of the concept of logarithms.

Keywords: Logarithm, Trigonometry, Arithmetic Progression, Geometric Progression, Prostaferese.

1. Introdução

Cajori (2007) ressalta que os miraculosos recursos do cálculo moderno, são devidos a três importantes invenções: a notação numérica indo-arábica, as frações decimais, e os logaritmos. Os logaritmos foram inventados por John Napier (1550-1617) e aprimorados por Henry Briggs (1561-1631). Não existe certeza da grafia correta de Napier, que pode ser Neper, Nepair ou Naipper. O nome Napier se afrancesou, convertendo-se em Néper, que originou o termo “logaritmo neperiano. (COLLETE, 2000, p. 304)

O panorama na da época da criação dos logaritmos, mostra que a Matemática passava por uma grande evolução nos séculos XVI e XVII. Ríbnikov (1987, p. 138) afirma que, principalmente com os trabalhos de François Viète (1540-1603), na Matemática europeia do século XVI, a álgebra tornou-se a ciência de soluções de equações, com métodos de solução de equações dos primeiros quatro graus. Os resultados de Viète, um jurista francês ligado à corte de Henrique IV (1553-1610) integravam-se no desenvolvimento da teoria das equações, onde se encontram algumas das primeiras representações de número por letras. (STRUIK, 1997, p. 150)

Os algebristas aperfeiçoaram a formulação simbólica da mesma e se empenharam em formular e resolver problemas da teoria geral das equações algébricas. A trigonometria se separou da astronomia, e seus resultados passaram a ter um grau suficiente de generalidade. A herança geométrica dos antigos foi totalmente assimilada pelos cientistas.

A geografia, a física e a astronomia, livres dos dogmas que a embutiam, mudaram rapidamente a percepção que a humanidade tinha do universo. O sistema heliocêntrico do polonês Nicolau Copérnico (Niklas Koppernigk) (1473-1543) depois de lutar durante quase um século contra as resoluções da Igreja, tinha encontrado a aceitação. Feito graças ao alemão Johannes Kepler (1571-1630) que formulava suas três leis do movimento planetário, livrando a astronomia do universo geocêntrico dos gregos. Na Itália nesta mesma época, Galileu Galilei (1564-1643) estabelecia as fundações da ciência da mecânica. Após cursar a Universidade de Cracóvia, Copérnico dirigiu-se à Itália e ali estudou Astronomia, Medicina e Direto. Mais tarde tornou-se professor de Matemática, Astronomia e Medicina em várias universidades europeias, retornando à Polônia em 1505. No ano seguinte começou a desenvolver um sistema astronômico com base em suas observações dos corpos celestes e logo constatou que a hipótese geocêntrica não era compatível com a realidade. Seus trabalhos na Astronomia levaram-no a estudar profundamente a Trigonometria. (GARBI, 2006, p. 118)

A circunavegação do globo pelo português Fernão de Magalhães (1480?-1521), no início do século XVI, proporcionou uma nova era de exploração marítima que possibilitou o conhecimento de várias partes do mundo. Em 1569 Gerhard Mercator (1512-1594) publicou o seu novo mapa do mundo, acontecimento que teve um impacto decisivo na navegação. A Matemática se desenvolve (Ríbnikov, 1987) em várias frentes. Além disso, sofrem transformações todos os elementos de sua estrutura: se desenvolvem novas teorias, se propõem e comprovam várias hipóteses, se acumulam feitos, que completam a estrutura de vários campos desta ciência, amplia-se a esfera de aplicação de métodos matemáticos, mudam as ideias gerais sobre a natureza da Matemática e suas possibilidades.

Todo esse desenvolvimento do conhecimento científico ocorrido no século XVI, exigia uma invenção que livrasse os estudiosos de passarem grande parte de seu tempo fazendo cálculos tão dispendiosos naquela época. Ríbnikov (1987) reforça essa ideia afirmando que, os estudiosos de matemática desse tempo passaram por grandes dificuldades de caráter prático-computacional. Essas dificuldades se concentravam em torno de problemas de confecção de tabelas de funções trigonométricas e também relacionada com esse problema a determinação do valor do número π. Outro problema consistia na busca de algoritmos simples e confiáveis de determinação das raízes de equações com coeficientes numéricos dados. Os recursos aritméticos de cálculo se limitavam às operações com números inteiros e frações simples, o caminho das frações decimais estava apenas no começo. Elas foram introduzidas pela primeira vez na Europa no ano de 1585, por Simon Stevin (1548-1620), o mais influente estudioso de matemática dos Países Baixos no século XVI, na obra "La Disme" (A Décima). Stevin tinha pormenorizado a ideia, juntamente com uma sugestão para a notação. Na opinião de Katz (2010), Napier foi o primeiro responsável pela introdução da nossa notação moderna para as frações decimais. Um pouco antes de publicar o *Constructio,* depois de notar que a precisão da computação requer a utilização de grandes números como $10.000.000$ como a base para a tabela dos senos, faz uma observação. Afirmou ele que, nas tabelas de computação, estes números grandes podem mais uma vez tornados ainda maiores colocando um ponto depois do número e acrescentando dígitos. E que em esses números distinguidos assim por um ponto ao seu meio, o que quer que esteja escrito depois do ponto é uma fração, o denominador da qual é unidade com tantos dígitos depois dela como há algarismos depois do ponto.

Napier apresenta um exemplo e afirma que 25.803 é o mesmo que $25\frac{803}{1000}$ e $9\,999\,998.000\,5021$ significa $9999998\frac{5021}{10{,}000{,}000}$.

Katz (2010, p.525) afirma que a publicação das tabelas de Napier, nas quais estas frações decimais apareciam, rapidamente resultou na sua utilização generalizada para toda a Europa. Até aquela época, os cálculos eram realizados a mão, o que reforçava a necessidade de novas descobertas nesse campo.

Na opinião de Ríbnikov (1987), as tabelas trigonométricas tiveram um grande papel naquela época, e também na criação dos logaritmos. No final do século XVI e no começo do XVII elas foram confeccionadas por Copérnico, Kepler e seus discípulos. Segundo Struik (1997), continham os valores de todas as seis funções trigonométricas de dez em dez segundos com dez decimais, e algumas delas como a de Bartholomäus Pitiscus (1561-1613) publicada em 1613, chegaram a

quinze casas decimais. Eram usadas por navegantes, astrônomos e construtores e essas tabelas surgiram em diferentes países e em diferentes variantes.
Nessas tabelas, o raio da circunferência geratriz escolhida para o cálculo, era de grande magnitude. Ríbnikov (1987) declara que esse fato é explicado pela ausência das frações decimais, sendo necessário obter os resultados em números inteiros e também a necessidade de assegurar uma exatidão suficientemente grande para esses cálculos. As preocupações fundamentais provocavam a determinação com exatidão particularmente alta dos senos (ou cordas) de arcos pequenos, para que nos cálculos não se refletisse a acumulação de erros. Para isso, usava-se o método dos antigos, de duplicação sucessiva dos lados de um polígono regular inscrito.
Para facilitar os cálculos de tabelas (Ríbnikov) os estudiosos de matemática inventaram procedimentos particulares em que tinham grande importância algumas relações trigonométricas particulares. O objetivo fundamental desses estudiosos era a redução, de acordo com as possibilidades, dos cálculos a operações mais simples, como a adição e a subtração; objetivo que também estava no cálculo com funções trigonométricas utilizando tabelas. Tentavam evitar a multiplicação e a divisão direta de números de várias cifras, reduzindo a procedimentos de adição e de subtração, chamados de método prostaférese, do tipo de: $2\cos A.\cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B)$ e outras fórmulas similares. O método de prostaférese era conhecido pelos astrônomos árabes no século X. Elas são redescobertas, de maneira provavelmente independente por um padre de Nüremberg, Johannes Werner (1468-1528) em um tratado de trigonometria esférica em cinco livros atualmente perdidos*: De triangulis per maximorum circulorum segmenta constructis libri V*. As fórmulas foram popularizadas no Ocidente por Jacob Christmann (1554-1613), astrônomo de Heidelberg. Sua obra *Theoria Luna* contém um extrato da trigonometria de Werner, em particular a explicação do método prostaférese. Naquele momento essas fórmulas não parecem que desempenharão mais tarde o papel de simplificar o cálculo das multiplicações. Elas foram revistas e desenvolvidas pelo famoso astrônomo Tycho Brahe (1546-1601) e seu rival Nikolaus Reimers chamado Raymarus Ursus (1551-1600). (COMMISSION INTER-IREM D'EPISTÉMOLOGIE ET D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES, HISTOIRES DE LOGARITHMES, 2006)

2. Um panorama da gênese de logaritmos

John Napier, Barão de Merchiston (Maor), nasceu no Castelo de Merchiston, perto de Edimburgo, na Escócia. Os detalhes de sua infância são imprecisos. Sabe-se que com treze anos foi para a Universidade de St. Andrews, onde estudou religião e suas atividades iniciais não sugeriam um futuro de criatividade matemática. Seu interesse principal estava na religião, ou com maior precisão, no ativismo religioso. Era um protestante ardoroso e firme oponente do papado, e publicou seus pontos de vista em *A Plaine Discovery of the whole Revelation of Saint John* (1593), livro que atacava duramente a Igreja Católica, afirmando que o papa era o Anticristo e conclamando o rei escocês Jaime VI (que mais tarde se tornaria o rei James I da Inglaterra) a expurgar de sua corte todos os "papistas, ateus e hereges".
Maor (2003) afirma que os interesses de Napier iam além de assuntos religiosos. Dono de terras e interessado na melhoria das colheitas e do gado, ele experimentou vários estercos e sais para fertilizar o solo. Em 1579 inventou um parafuso hidráulico para controlar o nível da água nas minas de carvão. Demonstrou também interesse por questões militares, motivado pelo temor geral de que o rei Felipe II da Espanha (1527-1598) estivesse se preparando para invadir a Inglaterra. Napier fez planos para construir enormes espelhos, capazes de incendiar os navios inimigos, e também planos para construir peças de artilharia com a finalidade de destruir pessoas. Não se sabe se alguma dessas máquinas chegou a ser construída. Como ele era uma pessoa que possuía interesses bem diversificados, tornou-se personagem de muitas histórias. Mas todas essas suas atividades foram

esquecidas, e seu nome está vinculado à história devido a uma ideia matemática abstrata, os logaritmos, que ele empregou vinte anos para desenvolver.

Henry Briggs, o segundo personagem da gênese dos logaritmos, foi professor de geometria do Gresham College de Londres e posteriormente professor da Universidade de Oxford. Foi o primeiro professor saviliano, de geometria de Oxford, e grande admirador de Napier. O termo saviliano significa titular de uma cátedra fundada por Sir Henry Savile (1549-1622). Em 1619, Savile fundou duas cátedras professorais em Oxford, uma de Geometria e outra de Astronomia. Briggs foi o primeiro ocupante da cadeira saviliana de Geometria de Oxford.

Conforme Eves (1995) a palavra logaritmo significa *número de razão* e foi adotada por John Napier depois de ter usado inicialmente a expressão *número artificial*. Essa palavra foi "cunhada" por ele (Cajori, 1993), mas nunca usou qualquer abreviação da mesma em seus escritos. Na terminologia atual (Davis, 1992), se $a^x = y$, então o logaritmo de y na base a é x, observa-se que, se x varia em progressão aritmética, y varia em progressão geométrica. Se $a^x = y$, dizemos que x é o logaritmo de y na base a. Dessa definição as leis dos logaritmos decorrem imediatamente das leis de expoentes. Eves (1995) afirma que uma das incoerências da história da Matemática é que os logaritmos foram descobertos antes de se usarem expoentes. A definição de Napier de logaritmos não possui relação com expoentes, pois uma notação adequada e padronizada para expressar expoentes ainda não havia sido desenvolvida plenamente até aquela época.

Segundo Maor (2003), não existe um relato sobre como Napier chegou na ideia que resultaria em sua invenção dos logaritmos, mas, durante o processo de construção, ele tomou conhecimento do método prostaférese. A importância destas fórmulas está em que o produto de duas expressões trigonométricas, como exemplo $senA.senB$, pode ser obtido determinando-se a soma ou a diferença de outras expressões trigonométricas, neste caso $\cos(A-B)$ e $\cos(A+B)$. Como é mais fácil somar e subtrair do que multiplicar e dividir, essas fórmulas fornecem um sistema primitivo de redução das operações multiplicação e divisão para as operações de adição e subtração, que são mais simples. E foi provavelmente esse elemento que colocou Napier no caminho certo para a sua invenção.

Um fator importante que também facilitou o surgimento dos logaritmos (Struik, 1997), foi que vários estudiosos de matemática do século XVI estavam diante da possibilidade de coordenar progressões aritméticas e geométricas, principalmente no que diz respeito a facilitar o trabalho com as complicadas tabelas trigonométricas. Além disso, outras considerações que levaram Napier a invenção dos logaritmos foram, o conceito geométrico-mecânico de pontos em movimento; e as relações existentes entre as progressões aritméticas e geométricas (COLLETTE, 2000, p. 304).

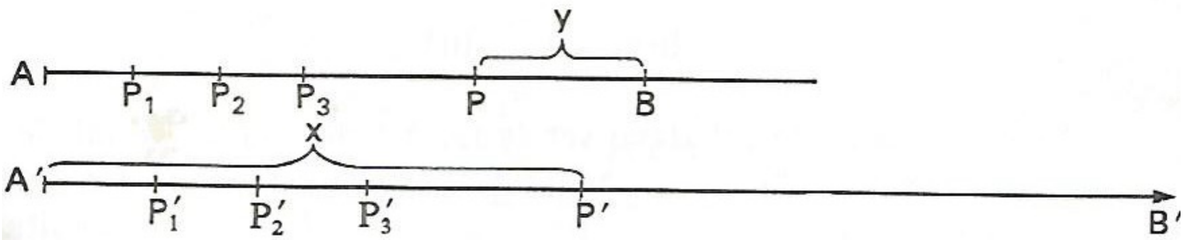
A ideia principal de Napier foi construir duas sucessões de números de tal modo relacionadas, que, quando uma crescesse em progressão aritmética, a outra decrescesse em progressão geométrica. Chegou-se a correspondência fundamental entre duas séries de números de modo geométrico. Baseou-se no fato de que, associando-se aos termos de uma progressão geométrica, $b, b^2, b^3, b^4, \ldots, b^m, \ldots, b^n, \ldots$ com os da progressão aritmética, $1,2,3,4,\ldots,m,\ldots,n,\ldots$, então o produto $b^m.b^n = b^{m+n}$ de dois termos da primeira progressão está associado à soma $m+n$ dos termos correspondentes da segunda progressão. Esta relação é uma ideia-chave por trás dos logaritmos. Mas onde Michael Stifel (1486-1567) praticava com expoentes inteiros, a ideia de Napier era estendê-los para uma faixa contínua de valores. Stifel é considerado o maior algebrista alemão do século XVI. Sua obra matemática mais conhecida é *Arithmetica integra* (1544), e divide-se em três partes: números racionais, irracionais e álgebra. Na primeira parte destaca as vantagens de se associar uma progressão aritmética a uma geométrica, prenunciando assim, de quase um século, a invenção dos logaritmos. Originalmente Stifel era um monge, acabou se tornando um reformador fanático, depois de convertido por Martinho Lutero (1483-1546). Seu espírito visionário não raro levava-o a enveredar pelo misticismo. (EVES, 1995, p. 301)

Napier (Boyer, 1996) pensou nas sequências de potências sucessivas de um dado número (o qual depois seria chamado de *base*). Nessas sequências, as somas e diferenças dos índices das potências correspondiam a produtos e quocientes das próprias potências. Esse método somente teria utilidade prática se pudesse ser usado com quaisquer números, inteiros ou frações. Para isso ser possível, seria necessário inicialmente preencher os espaços entre os números inteiros da tabela. Esse procedimento pode ser realizado de duas maneiras, usando expoentes fracionários ou escolhendo como base um número suficientemente pequeno, de modo que suas potências cresçam de uma maneira razoavelmente lenta. Expoentes fracionários, como $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (por exemplo, $2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5}$ $= \sqrt[3]{32} = 3{,}17480$), não eram inteiramente conhecidos na época de Napier; desta maneira a alternativa foi a segunda opção. Se a base b escolhida fosse muito pequena, suas potências cresceriam muito devagar, novamente tornando o sistema de pouco uso prático. Napier decidiu por um número próximo de 1, mas não muito próximo, para manter os termos da progressão geométrica suficientemente próximos, de modo que se possa usar interpolação para preencher as lacunas entre os termos na correspondência precedente. Enquanto refletia sobre esse assunto, ficou conhecendo o artifício da prostaférese, em uso naquela época na Dinamarca. Na segunda metade do século XVI, a Dinamarca tornou-se um importante centro cultural preocupado com os problemas relacionados com a navegação. Nela o astrônomo Tycho Brahe (1546-1601) realizou suas pesquisas. Dois estudiosos de matemática dinamarqueses, Wittich (1584) e Clavius (cuja obra, *De Astrolábio*, foi publicada em 1593) sugeriram o uso das tábuas trigonométricas para abreviar os cálculos. (HOGBEN, 1950, p. 485)

Napier publica em 1614 o tratado *Mirifici logarithmorum canonis discrip*tio (*Uma descrição da maravilhosa* regra dos logaritmos), em que expõe seu sistema de logaritmo e seu modo de uso. Ele consumiu vinte anos de sua vida para completar o trabalho, e a obra *Mirifici logaritmorum canonis constructio*, publicada em 1619, é o primeiro tratado sobre logaritmos e os procedimentos de construção das tábuas de logaritmos. Este último trabalho avança a ideia imaginativa de utilizar a geometria para construir uma tabela para o melhoramento da aritmética. (KATZ, 2010, p. 524)

Collette (2000) afirma que a obra de Napier tem como objetivo facilitar os cálculos trigonométricos; e sua tabela contém os logaritmos do seno de 0° até 90°, com um raio de 10^7. Primeiro Napier determinou os logaritmos somente dos senos; o segmento AB, sendo o seno de 90° é definido como sendo 10^7; PB era o seno do arco, $A'P'$ o seu logaritmo. Segundo Cajori (2007) as tábuas eram tábuas de logaritmos das funções trigonométricas com oito cifras para valores dos argumentos desde 0 até 90° cada $1'$. Ele tomou o logaritmo de $sen\ 90^\circ = 0$; isto é, o logaritmo de $10^7 = 0$. O logaritmo de $sen\ a$ aumenta de zero quando a decresce de 90°. A noção de base é inaplicável ao sistema de Nepier. Essa noção implica que zero seja o logaritmo de 1; no sistema de Nepier, zero é o logaritmo de 10^7.

A técnica de Napier consistiu (Davis, 1992) em representar números e logaritmos desses números por segmentos de reta determinados por dois pontos móveis P e P'.



A figura anterior consiste no significado geométrico de pontos em movimento. (Davis, 1992, p. 61). Seja um segmento AB de comprimento fixo e seja uma semi-reta $A^{'}B^{'}$, de origem $A^{'}$. Napier (Eves, 1995) admitia que o comprimento do segmento AB representava o número $10.000.000$ ou 10^{7}, também escolhido para ser o seno de 90°, com a vírgula decimal suprimida. Os outros números em sua progressão geométrica correspondiam (com aproximação de sete casas decimais) aos senos de certos ângulos. Essa escolha por esse número inicial foi para eliminar a dificuldade surgida ao utilizar frações; e também porque na época as melhores tábuas de senos de que dispunham estendiam-se até sete casas.

Suponhamos que os pontos P e $P^{'}$ partem simultaneamente de A e $A^{'}$, como na figura anterior, ao longo dessas linhas com a mesma velocidade inicial. Admitamos que P se mova sobre AB com velocidade numericamente sempre igual a distância PB, e que $P^{'}$ se mova com velocidade uniforme; ou seja que o ponto $P^{'}$ se desloque sobre a semi-reta $A^{'}B^{'}$, com velocidade constante igual à velocidade inicial de P. Fazendo $P_1^{'}$, $P_2^{'}$, ... corresponder a P_1, P_2,..., respectivamente, Napier definiu $A^{'}P^{'}$ como o logaritmo de PB (vamos admitir $PB = y$ e $A^{'}P^{'} = x$). Isto é, o logaritmo de P_1B igual a $A^{'}P_1^{'}$, o logaritmo de P_2B igual a $A^{'}P_2^{'}$ e assim por diante. Deve-se observar que, embora os comprimentos PB sejam decrescentes, seus logaritmos são crescentes. Ocorre que, em uma sucessão de períodos de tempo iguais, os comprimentos PB decrescem em progressão geométrica enquanto os comprimentos AP crescem em progressão aritmética, obtendo-se assim a correspondência anteriormente mencionada.

A ideia fundamental consiste em conseguir que os termos de uma progressão geométrica sejam potências inteiras muito próximas de um seno dado, e para isso é necessário utilizar um número próximo a um. Para este objetivo escolheu como razão da progressão geométrica o número $1-\frac{1}{10^{7}}$. Outra razão importante para a escolha de $1-\frac{1}{10^{7}}$ (Maor, 2003, p. 20), pode estar na preocupação de Napier em minimizar o uso de frações decimais, e também, como as potências de $1-\frac{1}{10^{7}}$ decrescem lentamente, Napier utilizou esse valor como base das potências para conservar os termos da sequência geométrica próximos uns dos outros e facilitar interpolações.

De um modo geral, as frações têm sido usadas por milhares de anos antes da época de Napier, mas elas eram quase sempre escritas como frações comuns, isto é, proporções entre números inteiros. As frações decimais, ou seja, a extensão do nosso sistema de numeração decimal para números menores do que 1, somente recentemente tinham sido introduzidas na Europa, e o público ainda não se sentia confortável com elas. Portanto (Maor, 2003), ao subtrair de uma unidade inteira sua 10^{7} parte, obtemos o número mais próximo de 1 nesse sistema, ou seja $1-10^{-7}$ ou $0{,}9999999$. Esta é a taxa comum ("proporção", em suas palavras) que Napier usou para construir sua tabela. Ele

seguiu a prática então usada na trigonometria de dividir o raio de um círculo em $10.000.000$ ou, 10^7 partes.
Napier procurou (Maor, 2003), através de subtrações repetidas, os termos sucessivos da progressão. Sua primeira tabela continha apenas 101 elementos, começando com 10^7, o primeiro termo de uma progressão geométrica de razão BP_1 = $1-\frac{1}{10^7}$, seguido do segundo termo P_1P_2 = $10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)=9.999.999$, o próximo P_2B = $P_1B-P_1P_2$ $=10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^2=9.999.998$ e daí em diante até $10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{100}$ = $9.999.900$.

Como o cálculo das potências de $1-\frac{1}{10^7}=0{,}9999999$, através de multiplicações é muito trabalhoso, Napier teve uma ideia simplificadora. Em notação moderna seria, se $a=1-\frac{1}{10^7}=0{,}9999999$ então $a^2=a.a=a.(1-\frac{1}{10^7})=a-\frac{a}{10^7}=0{,}9999998$. O próximo elemento da sequência $a^3=a^2.a=a^2.(1-\frac{1}{10^7})=a^2-\frac{a^2}{10^7}=0{,}9999997$, e assim por diante até $a^{100}=a.a^{99}=0{,}9999900$, fazendo subtrações sucessivas. Assim, $Nap\log 10^7=0$, $Nap\log 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)=1, Nap\log 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^2=2$ e sucessivamente até $Nap\log 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{100}=100$.

Para a construção da segunda tabela Napier repetiu o mesmo processo usado na primeira, começando novamente por 10^7, mas tomando como sua proporção, ou razão, a relação entre o último número e o primeiro em sua tabela original, isto é, $\frac{9.999.900}{10.000.000}=0{,}99999=1-\frac{1}{10^5}$, valor aproximado de $(1-\frac{1}{10^7})^{100}$. Esta tabela continha 51 elementos, o último sendo $10^7.(1-\frac{1}{10^5})^{50}\sim 9.995.001$. Os números apresentados na segunda tabela são valores aproximados de 10^7, $10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{100}$, $10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{200}$, $10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{300}$, ... , $10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{5000}$. E obteve os respectivos valores de L: 0, 100, 200, 300,..., 5.000. (MAOR, 2003, p. 21)
Para a terceira tabela calculou 21 elementos, sendo o primeiro $\frac{9.995.001}{10.000.000}=$ $0{,}9995$ valor aproximado de $(1-\frac{1}{10^7})^{5000}$ e o último elemento $10^7\times 0{,}9995^{20}\sim 9.900.473$. Os valores

aproximados de N desta tabela são: 10^7, $10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{5000}$, $10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10.000}$, $10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{15.000}$,..., $10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{100.000}$. Os respectivos valores de L são: 0, 5.000, 10.000, 15.000..., 100.000. (MAOR, 2003, p. 21)

E finalmente, de cada um dos 21 elementos da última tabela, criou mais 68 elementos, usando a proporção $\frac{9.900.473}{10.000.000} \sim 0{,}99$. O último elemento sendo $9.900.473 \times 0{,}99^{68} \sim 4.998.609$, mais ou menos a metade do número original. (MAOR, 2003, p. 21)

Os valores aproximados são: 10^7, $10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{100.000}$, $10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{200.000}$,..., $10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{6.800.000}$ $10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{5.000}$, $10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{105.000}$,..., $10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{6.805.000}$ $10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10.000}$, $10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{110.000}$,..., $10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{6.810.000}$ ...$10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{100.000}$, $10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{200.000}$, ..., $10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{6.900.000}$. Se $N = 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{L}$, ele chamava L de "logaritmo" do número N.

Usando técnicas do cálculo moderno (Eves, 1995), observa-se o resultado obtido por Napier. Como a velocidade inicial de P' é 10^7 velocidade inicial de P, igual ao comprimento de AB, temos que $AP = 10^7 - y$, e obtém-se: velocidade de P é $-\frac{dy}{dt} = y$, isto é $\frac{dy}{y} = -dt$, e integrando a expressão anterior, temos $\ln y = -t + C$. Calculando a constante de integração, fazendo $t = 0$, obtemos $C = \ln 10^7$ (já que $AB = 10^7$). E, portanto $\ln y = -t + \ln 10^7$ (1). Por outro lado, a velocidade de P' é $\frac{dx}{dt} = 10^7$ (velocidade uniforme) assim, $dx = 10^7\,dt$, logo $x = 10^7 t + C_1$. Se $t = 0$, $x = 0$, então $C_1 = 0$. Assim, $x = 10^7 t$, $t = \frac{x}{10^7}$ (2). Substituindo (1) em (2) obtemos: $\ln y = -\frac{x}{10^7} + \ln 10^7$. Desse modo, $\frac{x}{10^7} = \ln 10^7 - \ln y$, $\frac{x}{10^7} = \ln\frac{10^7}{y}$. Portanto, $x = 10^7.\ln\frac{10^7}{y}$. Mas, se x é o logaritmo neperiano de y, então a relação entre os logaritmos neperianos e os logaritmos naturais será:

$$Nap\log y = x = 10^7.\ln\left(\frac{10^7}{y}\right) = 10^7.\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{y}{10^7}\right)$$

Para a observação das relações existente entre as Progressões Aritmética e Geométrica, vamos atribuir valores para a variável x da Progressão Aritmética, e calcular os valores correspondentes à variável y da Progressão Geométrica. Se $x = 0$ temos, substituindo na expressão anterior $x = 10^7.\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{y}{10^7}\right)$, $0 = 10^7.\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{y}{10^7}\right)$ o que segue $\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{y}{10^7}\right) = 0$. Utilizando a equivalência fundamental dos logaritmos $\left(\frac{1}{e}\right)^0 = \frac{y}{10^7}$ obtemos $y = 10^7$. Portanto, se $x = 0$ temos $y = 10^7$. Se $x = 1$ for substituído em $x = 10^7.\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{y}{10^7}\right)$, obtemos $1 = 10^7.\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{y}{10^7}\right)$ o que segue $\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{y}{10^7}\right) = \frac{1}{10^7}$. Assim, $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{10^7}} = \frac{y}{10^7}$ segue que $y = \frac{10^7}{e^{\frac{1}{10^7}}} = \frac{10^7}{e^{0,0000001}} = 9.999.999$. Portanto, se $x = 1$ obtemos $y = 9.999.999$. Utilizando do mesmo procedimento, temos se $x = 2$, obtemos $y = 9.999.998$. Se $x = 3$, o valor da variável y será $y = 9.999.997$, e assim sucessivamente. O que mostra a relação existente entre as Progressões Aritmética e Geométrica, através obtida do conceito geométrico-mecânico dos pontos em movimento, utilizando de procedimentos do Cálculo atual.

Observando a expressão $\frac{x}{10^7} = \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{y}{10^7}\right)$ constatamos que as distâncias x e y, na exposição geométrica de Napier, são divididas por 10^7, e a definição de Napier leva a um sistema de logaritmos de base $\frac{1}{e}$, e não e, como é atualmente. Desta maneira, (Eves, 1995) a afirmação feita frequentemente de que os logaritmos neperianos são logaritmos naturais não corresponde de fato a verdade. Observa-se que os logaritmos neperianos decrescem conforme os números crescem, ao contrário do que ocorre com os logaritmos naturais. Além disso, observa-se usando a expressão $x = 10^7.\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{y}{10^7}\right)$ que, sobre uma sucessão de períodos de tempo iguais, y *decresce* em progressão geométrica enquanto x *cresce* em progressão aritmética. A razão deste fato está em que Napier (Collette, 2000,) construiu as tábuas a partir das multiplicações repetidas, equivalentes a potências de $0,9999999$, seu sistema verifica a relação $\log m < \log n$ se $m > n$, pois utilizava implicitamente um sistema de base $\frac{1}{e}$. Seu sistema se diferenciava dos atuais nas propriedades fundamentais dos logaritmos.
Concluindo, Struik (1997) observa que a explicação dos logaritmos em termos de exponenciais é historicamente um tanto quanto enganosa, pois o conceito de exponencial data apenas do final do século XVII. Como já afirmamos anteriormente, Napier não tinha a noção de base, e os logaritmos naturais associados à função $y = e^x$, aparecem quase na mesma época que os logaritmos de Briggs, mas a sua importância fundamental não seria reconhecida até que o cálculo infinitesimal passasse a ser mais bem compreendido.

3. Conclusões

Para situarmos na História da Matemática a criação dos logaritmos, abordamos tópicos sobre o grande desenvolvimento dessa ciência e de outras, ocorrido nos séculos XVI e XVII, impulsionados por uma série de fatores como as navegações. Essas foram facilitadas com o novo mapa do mundo criado por Mercador, e também com a circunavegação do globo realizado por Fernão de Magalhães. Ressaltamos também, o grande desenvolvimento da geografia e da física que ficaram livres dos dogmas que impediam suas evoluções. E também o impulso dado ao progresso naquela época com a substituição do sistema geocêntrico dos gregos antigos, pelo sistema heliocêntrico desenvolvido por Copérnico e Kepler. Outro fator importante que incrementou ainda mais esse progresso foi o estabelecimento dos fundamentos da mecânica, por Galileu.

Para acompanhar toda essa evolução da humanidade, a Matemática se desenvolveu em várias frentes, como a aceitação da notação indo-arábica, o estabelecimento das frações decimais por Stevin, os resultados de Vietè com as primeiras representações de números por letras que favoreceram os cálculos algébricos e com isso, a álgebra tornou-se a ciência das soluções de equações. Outro fator de grande progresso foi a introdução das tabelas trigonométricas confeccionadas por Copérnico e Kepler. Nessa época importantes tópicos da Matemática, fundamentais para o surgimento dos logaritmos, foram introduzidos. Entre eles a notação para a potenciação, as relações entre Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas, e também a introdução do novo conceito geométrico-mecânico de pontos em movimento. Nesse período, a herança geométrica grega foi totalmente assimilada pelos estudiosos da época.

Mas, ainda faltava um procedimento para livrar os praticantes do cálculo da grande dificuldade gerada pelo uso do ábaco. O grande progresso da humanidade exigia um procedimento para a realização dos cálculos mais rápidos sem a utilização do ábaco que dificultava a resolução dos mesmos. As fórmulas de Werner e o método prostafere redescobertos na época, favoreceram Neper na sua construção dos logaritmos. A partir das tabelas de logaritmos, as multiplicações eram transformadas em adições, facilitando os cálculos daquela época e utilizados na atualidade. Destacamos que os tópicos abordados nesse artigo estimulam a criação de procedimentos de ensino, que relacionem Progressões Aritméticas e Geométricas com a Trigonometria e também a utilização de noções de Derivadas e Integrais.

Referências

BOYER, Carl B., *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda., 1996.

CAJORI, Florian, *A History of Mathematical Notations – 1*. New York: Dover Publications, INC., 1993.

CAJORI, Florian, *Uma História da Matemática*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

COLLETTE, Jean-Paul, *Historia de las Matemáticas*. México: Siglo Veintiuno Editores, S. A., 2000.

COMMISSION INTER-IREM D'EPISTÉMOLOGIE ET D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES, *Histoires de Logarithmes*. Paris: Ellipses Édition Marketing S.A, 2006.

DAVIS, Harold T., *Tópicos de História da Matemática para uso em Sala de Aula: Computação*. São Paulo: Atual Editora, 1992.

EVES, Howard, *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

GARBI, Gilberto, G. *A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática.* São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

HOGBEN, Lancelot, *Maravilhas da Matemática*. Porto Alegre: Editora Globo, 1950.

KATZ, Victor J., *História da Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

MAOR, Eli, e: *A História de um Número*. Rio de Janeiro: Record, 2003.

PEIFFER, Jeanne; Dahan-Dalmedico, Amy. *Une Histoire des Mathématiques: Routes et Dédales*. Paris: Éditions du Seuil, 1986.
RÍBNIKOV, K., *Historia de las Matemáticas*. Moscou: Editorial Mir Moscú, 1987.
STRUIK, Dirk, J., *História Concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1997.